לוגיקה ותורת הקבוצות - 2026

פתרון תרגיל 6

15 נקודות

1. ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. כתבו את עץ היצירה של הנוסחה הבאה:

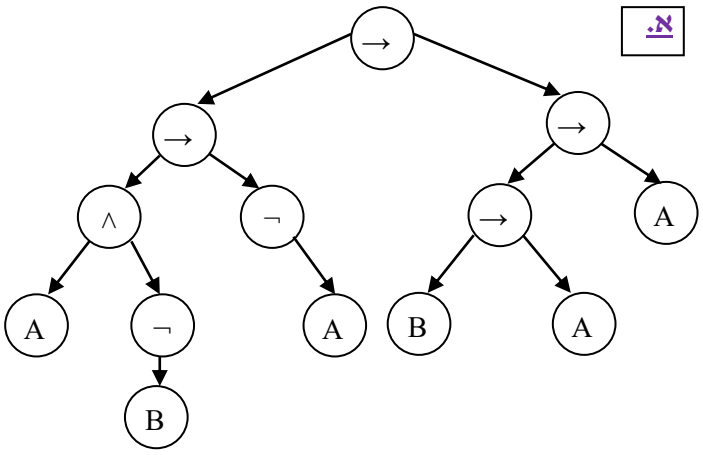
$$(((A\wedge(\neg B)) \to (\neg A)) \to ((B \to A) \to A))$$

ב. הצרינו את הטיעון הבא ולאחר מכן בנו טבלת אמת ובדקו האם המסקנה נובעת לוגית מההנחות. אם כן, הסבירו מדוע יש נביעה לוגית. אם לא, ציינו במפורש מהי ההשמה שמפריכה את הנביעה הלוגית:

"השקדיה פורחת ושמש פז זורחת. אבל אם השקדיה פורחת ושמש פז זורחת אז ט"ו בשבט הגיע. עכשיו לא ט"ו בשבט. לכן או שהשקדיה לא פורחת או ששמש פז לא זורחת"

פתרון:

א.



ב. **מילון:**

A - השקדיה פורחת B - שמש פז זורחת C - ט"ו בשבט הגיע.

$$\{A\wedge B\ ,(A\wedge B) \to C\ ,\neg C\} \vDash \neg A\vee\neg B$$

A	B	C	$A\wedge B$	$\neg C$	$(A\wedge B) \to C$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A\vee\neg B$
T	T	T	**T**	**F**	**T**	F	F	**F**
T	T	F	**T**	**T**	**F**	F	F	**F**
T	F	T	**F**	**F**	**T**	F	T	**T**
T	F	F	**F**	**T**	**T**	F	T	**T**
F	T	T	**F**	**F**	**T**	T	F	**T**
F	T	F	**F**	**T**	**T**	T	F	**T**
F	F	T	**F**	**F**	**T**	T	T	**T**
F	F	F	**F**	**T**	**T**	T	T	**T**

המסקנה (בסגול) נובעת לוגית מההנחות (בכחול) באופן ריק.

אין השמה שמספקת את קבוצה ההנחות.

15 נקודות

2. לגבי כל פסוק קבעו **ללא שימוש בטבלת אמת**:
האם הוא ספיק? האם הוא טאוטולוגיה? האם הוא סתירה?

א. $\neg(p \to (\neg p \to q))$

ב. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

ג. $(p \to q) \vee (\neg p \vee q)$

פתרון:

א. הפסוק הינו סתירה (לכן אינו ספיק וגם אינו טאוטולוגיה). נוכיח ע"י שימוש בשקילויות ידועות שהפסוק שקול ל-F, כלומר הוא סתירה.

$$\neg(p \to (\neg p \to q)) \underbrace{\equiv}_{\substack{\text{שלילת}\\ \text{גרירה}}} p \wedge \neg(\neg p \to q) \underbrace{\equiv}_{\substack{\text{שלילת}\\ \text{גרירה}}} p \wedge (\neg p \wedge \neg q) \underbrace{\equiv}_{\text{קיבוץ}} (p \wedge \neg p) \wedge \neg q \underbrace{\equiv}_{\text{סתירה}} F \wedge \neg q \equiv F$$

ב. הפסוק הוא טאוטולוגיה ולכן גם ספיק. נוכיח ע"י שימוש בשקילויות ידועות שהפסוק שקול ל-T, כלומר הוא טאוטולוגיה.

$$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)) \underbrace{\equiv}_{\substack{\text{פירוק}\\ \text{גרירה}}}$$

$$\equiv (p \to (\neg q \vee r)) \to ((\neg p \vee q) \to (\neg p \vee r)) \underbrace{\equiv}_{\substack{\text{פירוק}\\ \text{גרירה}}}$$

$$\equiv (\neg p \vee (\neg q \vee r)) \to (\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r)) \underbrace{\equiv}_{\substack{\text{פירוק}\\ \text{גרירה}}}$$

$$\equiv \neg(\neg p \vee (\neg q \vee r)) \vee (\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r)) \underbrace{\equiv}_{\text{דה-מורגן,קיבוץ}}$$

$$\equiv \neg(\neg p \vee \neg q \vee r) \vee ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r)) \underbrace{\equiv}_{\text{קיבוץ}}$$

$$\equiv \neg(\neg p \vee \neg q \vee r) \vee (((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \vee r) \underbrace{\equiv}_{\text{פילוג}}$$

$$\equiv \neg(\neg p \vee \neg q \vee r) \vee (((p \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r) \underbrace{\equiv}_{\text{טאוטולוגיה}}$$

$$\equiv \neg(\neg p \vee \neg q \vee r) \vee ((T \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r) \underbrace{\equiv}_{\text{תכונת וגם}}$$

$$\equiv \neg(\neg p \vee \neg q \vee r) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r) \underbrace{\equiv}_{\text{תבנית } \neg\blacksquare\vee\blacksquare} \boldsymbol{T}$$

ג. הפסוק ספיק (ולכן אינו סתירה) אך אינו טאוטולוגיה. נראה דוגמה להשמה מספקת ולהשמה לא מספקת:

$v(p) = T \ , v(q) = T$: $\quad (T \to T) \vee (\neg T \vee T) \equiv T \vee T \equiv T$

$v(p) = T \ , v(q) = F$: $\quad (T \to F) \vee (\neg T \vee F) \equiv F \vee F \equiv F$

20 נקודות

3. בשאלה הבאה הניחו שכתיבת הסוגריים היא מלאה, כלומר נוספים סוגריים בכל הפעלה של קשר.

לכל פסוק α בתחשיב הפסוקים, נגדיר:

$\boldsymbol{neg(\alpha)}$ הינו מספר המופעים של קשר השלילה בפסוק α.

$\boldsymbol{len(\alpha)}$ הינו מספר התווים בפסוק α.

הוכיחו: לכל פסוק α מתקיים $len(\alpha) \geq 2 \cdot neg(\alpha) + 1$.

פתרון:

נוכיח באינדוקציית מבנה על α.

בסיס האינדוקציה: α הוא אטום, כלומר משתנה או קבוע.

בשני המקרים $len(\alpha) = 1,\ neg(\alpha) = 0$ ואכן מתקיים:

$$len(\alpha) = 1 \geq 2 \cdot 0 + 1 = 2 \cdot neg(\alpha) + 1$$

צעד האינדוקציה: נניח שלכל β תת-פסוק ממש של α מתקיים $len(\beta) \geq 2 \cdot neg(\beta) + 1$

ונוכיח $len(\alpha) \geq 2 \cdot neg(\alpha) + 1$.

נפריד למקרים:

- אם $\alpha = (\neg\beta)$ עבור β כלשהו:
  - נשים לב שמתקיים $len(\alpha) = len(\beta) + 3$ וכמו כן $neg(\alpha) = neg(\beta) + 1$.
  - מכיוון ש-β תת-פסוק ממש של α הרי שלפי הנחת האינדוקציה:

$$len(\beta) \geq 2 \cdot neg(\beta) + 1$$

  - ואכן מתקיים:

$$\boldsymbol{len(\alpha)} = len(\beta) + 3 \geq 2 \cdot neg(\beta) + 1 + 3 =$$
$$= 2(neg(\alpha) - 1) + 4 = 2neg(\alpha) + 2 \geq \boldsymbol{2nega + 1}$$

- אם $\alpha = (\beta_1 * \beta_2)$ עבור β_1, β_2 כלשהם וקשר בינארי $*$ כלשהו:
  - נשים לב שמתקיים $len(\alpha) = len(\beta_1) + len(\beta_2) + 3$ כי נוסף הקשר $*$ ונוספו שני סימני סוגריים.
  - כמו כן $neg(\alpha) = neg(\beta_1) + neg(\beta_2)$ כי לא נוספו שלילות.
  - מכיוון ש-β_1, β_2 תתי-פסוק ממש של α הרי שלפי הנחת האינדוקציה:

$$len(\beta_1) \geq 2 \cdot neg(\beta_1) + 1$$
$$len(\beta_2) \geq 2 \cdot neg(\beta_2) + 1$$

  - ואכן מתקיים:

$$\boldsymbol{len(\alpha)} = len(\beta_1) + len(\beta_2) + 3 \geq 2 \cdot neg(\beta_1) + 1 + 2 \cdot neg(\beta_2) + 1 + 3 =$$
$$= 2(neg(\beta_1) + neg(\beta_2)) + 5 = 2neg(\alpha) + 5 \geq \boldsymbol{2nega + 1}$$

- הוכחנו שבכל מקרה מתקיים הדרוש ולכן הוכחנו באינדוקציה את הטענה.

15 נקודות

4. תהיינה X, Y, Z קבוצות פסוקים בתחשיב הפסוקים.

ידוע ש-$X \cap Y$ ספיקה ו-$Y \cap Z$ אינה ספיקה.

הוכיחו או הפריכו:

א. Y לא ספיקה.

ב. X ספיקה.

ג. $X \cap Y \cap Z$ ספיקה.

פתרון:

א. הוכחה:

- נניח בשלילה ש-Y ספיקה ותהי v השמה שמספקת את Y.
- מכיוון ש-$Y \cap Z \subseteq Y$, הרי ש-v מספקת את כל הפסוקים של $Y \cap Z$ ולכן היא ספיקה בסתירה להנחה.

ב. הפרכה:

- נבחר $X = \{p \wedge \neg p\},\ Y = Z = \{q \wedge \neg q\}$.
- נקבל $X \cap Y = \emptyset$ אשר הינה ספיקה (באופן ריק) וכמו כן $Y \cap Z = Y$ אשר אינה ספיקה, כלומר ההנחות מתקיימות.
- אבל X אינה ספיקה ולכן הפרכנו את הטענה.

ג. הוכחה:

- מכיוון ש-$X \cap Y$ ספיקה הרי שקיימת השמה v שמספקת אותה.
- ידוע ש-$X \cap Y \cap Z \subseteq X \cap Y$, לכן v מספקת את כל פסוקי $X \cap Y \cap Z$, כלומר היא ספיקה.

20 נקודות

5. תהי S קבוצת פסוקים ויהיו α, β, δ פסוקים:

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $S \cup \{\alpha\} \vDash \beta$ וגם $S \cup \{\neg\alpha\} \vDash \beta$ אז $S \vDash \beta$.

ב. אם $S \cup \{\alpha\}$ ספיקה, אז $S \cup \{\neg\alpha\}$ לא ספיקה.

ג. אם $\{\alpha\} \vDash \beta \vee \delta$ אז $\{\alpha\} \vDash \beta$ או $\{\alpha\} \vDash \delta$.

ד. תהיינה S_1 ו-S_2 קבוצות פסוקים. אם S_1 ספיקה ו-S_2 ספיקה אז $S_1 \cup S_2$ ספיקה.

פתרון:

ד. הוכחה:

נניח: 1. $S \cup \{\alpha\} \vDash \beta$ 2. $S \cup \{\neg\alpha\} \vDash \beta$

- תהי v השמה מספקת ל-S. נפריד למקרים:
- אם $v(\alpha) = T$, אז v מספקת את $S \cup \{\alpha\}$ ולפי הנחה 1 מספקת את β.
- אם $v(\alpha) = F$ הרי ש-$v(\neg\alpha) = T$. לכן v מספקת את $S \cup \{\neg\alpha\}$ ולפי הנחה 2 מספקת את β.
- בכל מקרה v מספקת את β ולכן $S \vDash \beta$ כנדרש.

ה. הפרכה:

- נבחר $S = \{p\}$ ו-$\alpha = q$.
- נקבל $S \cup \{\alpha\} = \{p, q\}$. מהנתון שהקבוצה ספיקה נסיק שקיימת השמה v שעבורה $v(p) = v(q) = T$.
- בנוסף, נקבל $S \cup \{\neg\alpha\} = \{p, \neg q\}$. ברור שיש השמה שמספקת את הקבוצה, למשל ההשמה $v(p) = T$, $v(q) = F$.

ו. הפרכה:

- נבחר $\beta = p$, $\alpha = p \vee \neg p$ ו-$\delta = \neg p$.
- מתקיים $\{\alpha\} \vDash \beta \vee \delta$: נציב ונקבל $\{p \vee \neg p\} \vDash (p \vee \neg p)$.
- הפסוקים זהים לכן הנביעה מתקיימת.
- אבל לא מתקיים $\{\alpha\} \vDash \beta$: בהשמת $v(p) = F$ נקבל $\alpha \equiv T$, $\beta \equiv F$.
- וגם לא מתקיים $\{\alpha\} \vDash \delta$: בהשמת $v(p) = T$ נקבל $\alpha \equiv T$, $\delta \equiv F$.

ז. הפרכה:

- נבחר $S_1 = \{p\}$ ו-$S_2 = \{\neg p\}$.
- אזי S_1 ספיקה עבור $v(p) = T$ ו-S_2 ספיקה עבור $v(p) = F$.
- אבל $S1 \cup S2 = \{p, \neg p\}$ אינה ספיקה.

15 נקודות

ו. יהיו α, β, γ פסוקים. נניח ש-$\{\beta\} \nvDash \gamma$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\{\alpha\} \vDash \gamma$ אז $\{\alpha, \beta\} \vDash \gamma$.

ב. אם $\{\alpha\} \vDash \beta$ וגם $\{\alpha\} \vDash \neg\beta$. אז α סתירה.

פתרון:

א. הוכחה:

- נניח ש-$\{\beta\} \nvDash \gamma$ וגם $\{\alpha\} \vDash \gamma$ ונניח בשלילה ש-$\{\alpha, \beta\} \nvDash \gamma$.
- מהנחה 3 נובע כי קיימת השמה v שעבורה $v(\gamma) = F$, $v(\alpha) = v(\beta) = T$.
- בפרט $v(\alpha) = T \ \wedge \ v(\gamma) = F$.
- בסתירה לכך ש-$\{\alpha\} \vDash \gamma$.
- מכאן שהטענה הוכחה.

ב. הוכחה:

נניח: 1. $\{\alpha\} \vDash \beta$

2. $\{\alpha\} \vDash \neg\beta$

3. נניח בשלילה α אינה סתירה

- מ-3 נובע שקיימת השמה שעבורה $v(\alpha) = T$.
- מ-1 נובע שעבור השמה זו מתקיים $v(\beta) = T$.
- מ-2 נובע שעבור השמה זו מתקיים $v(\neg\beta) = T$, כלומר $v(\beta) = F$.
- הגענו לסתירה ולכן הוכחנו את הטענה.